



Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

16. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Blatt 9: erste Probeklausur

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_{[1,2]^2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} d(x, y)$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Menge:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [1, 2], y, z \geq 0, y + zx^2 \leq x\}$$

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ lokal-integrierbar, $f \geq 0$, und sei

$$A = \left\{ \int_K f \, dx \mid K \text{ kompakt} \right\}$$

beschränkt. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist mit $\int f \, dx = \sup A$.

Aufgabe 4: Beweisen Sie, dass jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}^n$ mit endlich vielen Häufungspunkten eine Nullmenge ist.

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 10. Januar 2011 im Übungskasten.



Andreas Fackler

10. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zur ersten Probeklausur (Blatt 9)

Aufgabe 1: $[1, 2]^2$ ist kompakt und damit ist die stetige Funktion $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$ auf $[1, 2]^2$ integrierbar mit:

$$\begin{aligned} \int_{[1,2]^2} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} d(x,y) &= \int_{[1,2]^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) d(x,y) = \int_1^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) dx dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{-1}{x} + \frac{x}{y^2} \Big|_1^2 \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{1} + \frac{2}{y^2} - \frac{1}{y^2} \right) dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{y^2} \right) dy = \frac{y}{2} + \frac{-1}{y} \Big|_1^2 = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} - \frac{-1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: $A = ([1, 2] \times [0, 2]^2) \cap f^{-1}([0, \infty))$, wobei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion $f(x, y, z) = x - zx^2 - y$ ist. Folglich ist A beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Daher ist A integrierbar.

Für $x \in [1, 2]$ ist $A_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y, z \geq 0, y + zx^2 \leq x\}$ und für $y \in [0, x]$ ist $(A_x)_y = \{z \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq \frac{x-y}{x^2}\} = [0, \frac{x-y}{x^2}]$ (sonst leer). Mit dem Satz von Fubini erhalten wir das Volumen:

$$\begin{aligned} v(A) &= \int_1^2 \int_0^x v \left(\left[0, \frac{x-y}{x^2} \right] \right) dy dx = \int_1^2 \int_0^x \frac{x-y}{x^2} dy dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} \Big|_0^x \right) dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $[-k, k]^n$ kompakt, also ist f jeweils über $[-k, k]^n$ integrierbar und nach Definition von A gilt:

$$\int f \cdot \mathbf{1}_{[-k,k]^n} dx = \int_{[-k,k]^n} f dx \leq \sup A.$$

Die Folge der Funktionen $f \cdot \mathbf{1}_{[-k,k]^n}$ ist aber monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f , also ist nach dem Satz von Levi f integrierbar mit dem Integral

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f \cdot \mathbf{1}_{[-k,k]^n} dx \leq \sup A$$

Sei nun umgekehrt K kompakt. Dann ist $f \cdot \mathbf{1}_K \leq f$, also $\int_K f dx \leq \int f dx$. Daraus folgt $\sup A \leq \int f dx$, also ist $\int f dx = \sup A$.

Aufgabe 4: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und sei die Menge A' der Häufungspunkte von A endlich. Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $v(A) \leq \varepsilon$; dann folgt, dass $v(A) = 0$ sein muss.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Häufungspunkte von A . Für jeden Häufungspunkt $x \in A'$ von A ist

$$Q_x = \left(x_1 - \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}, x_1 + \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}} \right) \times \dots \times \left(x_n - \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}, x_n + \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}} \right)$$

ein offener Würfel mit $v(Q_x) = \frac{\varepsilon}{k}$ und $x \in Q_x$.

Angenommen, $B = A \setminus \bigcup_{i=1}^k Q_i$ sei eine unendliche Menge. Wähle ein beliebiges $b_0 \in B$ und wähle dann rekursiv für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein beliebiges $b_{j+1} \in B \setminus \{b_0, \dots, b_j\}$. Dann ist $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine injektive Folge in B (das heißt, jedes Folgenglied kommt nur einmal vor). Da A beschränkt ist und $B \subseteq A$, ist also auch die Folge $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt und hat daher einen Häufungspunkt c . Da c höchstens einmal in der Folge $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vorkommt, gibt es auf jeden Fall eine Teilfolge in $B \setminus \{c\}$, die gegen c konvergiert. Also ist c Häufungspunkt von B und damit auch von A , das heißt $c \in A'$. Da aber Q_c eine offene Umgebung von c ist, die kein Element von B enthält, ist das unmöglich.

Es ist also B endlich und daher $v(B) = 0$. Daher ist wegen $A \subseteq B \cup \bigcup_{x \in A'} Q_x$:

$$v(A) \leq v \left(B \cup \bigcup_{x \in A'} Q_x \right) \leq v(B) + \sum_{x \in A'} v(Q_x) = 0 + \sum_{x \in A'} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$